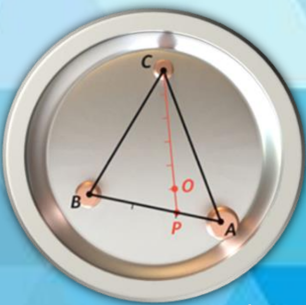
Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение
ГИМНАЗИЯ № 216 «ДИДАКТ»

Метод масс в геометрии треугольника

(сборник задач)



г.Заречный, 2020 г

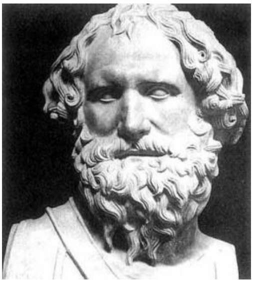
Составители:
Лакеева Софья Романовна,
обучающаяся 10 класса
Зуева Татьяна Алексеевна,
учитель математики

На олимпиадах и экзаменах по математике и физике встречаются задачи, в которых надо довольно много величин и при этом не сразу удается установить связь между ними и искомой величиной, а так же грамотно обосновать ход мыслей.

Метод геометрии масс позволяет более рационально решать задачи повышенного уровня сложности с применением нестандартных, не изучаемых в школьном курсе теорем, свойств и формул. Благодаря данному методу у обучающихся формируется нестандартное мышление, способствующее пониманию природы происходящих событий.

Данный сборник предназначен для обучающихся 8-11 классов.

СОДЕРЖАНИЕ



«…Я счел нужным написать тебе и… изложить особый метод, при помощи которого ты получишь возможность находить некоторые математические теоремы. Я уверен, что этот метод будет тебе ничуть не менее полезен и для доказательства самих теорем…»

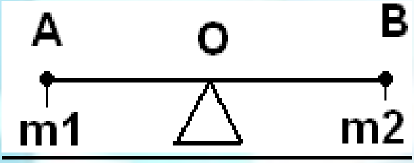
Архимед. Послание к Эратосфену «О механических теоремах»

Родоначальником барицентрического метода был великий древнегреческий мыслитель Архимед. Еще в III в. до н. э. он открыл оригинальный способ доказательства геометрических теорем, основанный на рассмотрении центра масс системы материальных точек (метод «геометрии масс»). В частности, этим способом им была установлена теорема о том, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

- **Наглядное определение:**

Рассмотрим термин «центр масс», взяв за основу «золотое правило механики»:

Пусть качели – отрезок AB (рис.1), где m1, m2 – массы, расположенные на концах качелей (m1 >m2). Центром масс данной системы двух точек будет такая точка O данного отрезка AB, что AO × m1 = BO × m2.



Свойства центра масс:

- Всякая система, состоящая из конечного числа материальных точек, имеет центр масс и притом только единственный.

- Центр масс двух материальных точек расположен на отрезке, соединяющем эти точки, его положение определяется архимедовым правилом рычага.
- Если в системе, состоящей из конечного числа материальных точек, отметить несколько материальных точек и массы отмеченных точек перенести в их центр масс, то от этого положение цента масс системы не изменится.

Основное определение:

Центром масс (или барицентром) системы материальных точек m_1A_1, m_2A_2,...,m_nA_n. называется точка Z, для которой имеет место равенство

$$m_1\overline{ZA_1} + m_2\overline{ZA_2} + \ldots + m_n\overline{ZA_n} = \overline{0}$$

Основные теоремы и их доказательства

Теорема 1.

А) Если точка Z служит центром масс системы материальных точек, то при любом выборе в пространстве точки O справедливо равенство

$$\overline{OZ} = \frac{m_1\overline{OA_1}+m_2\overline{OA_2}+\ldots+m_n\overline{OA_n}}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$$

Б) Обратно: если хотя бы при одном выборе в пространстве точки O верно равенство , то точка Z — центр масс системы.

Следствие 1. Всякая система, состоящая из конечного числа материальных точек, имеет однозначно определенный центр масс.

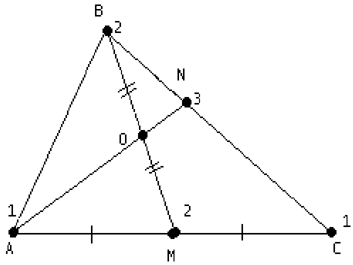
Теорема 2.

Центр масс двух материальных точек расположен на отрезке, соединяющем эти точки; его положение определяется архимедовым правилом рычага: $m_1d_1 = m_2d_2$.

Теорема 3.

Пусть в системе, состоящей из n материальных точек, отмечены k материальных точек m_1A_1,…$m_кA_к$ (рис. 3) и пусть C — центр масс отмеченных материальных точек. Если всю массу отмеченных материальных точек, сосредоточить в их центре масс C, то от этого положение центра масс всей системы не изменится. Иначе говоря, система имеет тот же центр масс, что и система материальных точек $(m_1 + ... + m_к)C$, $m_{k+1}A_{k+1}, .., m_nA_n$

Задача 1. Пусть дан треугольник ABC. BM – медиана, AN делит сторону BC в отношении 1/2 от вершины B. AN пересекает BM в точке O. Найти отношение BO/OM.



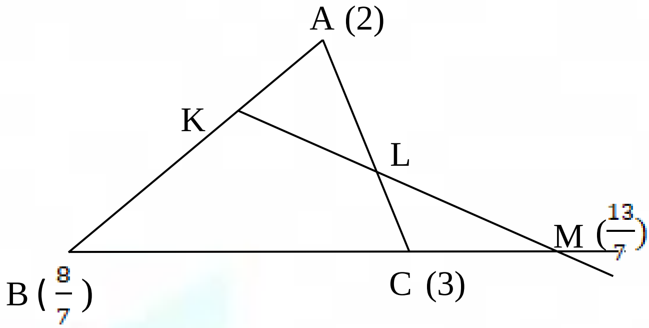
Загрузим точки A, B, C соответствующими массами.

1. По определению центра масс для точки M: $AM \times m_A = MC \times m_C$; $AM = MC$ (т.к. BM - медиана), следовательно $m_A = m_C = 1$
2. По определению центра масс для точки N: $BN \times m_B = CN \times m_C$; т.к. AN делит сторону BC в отношении 1/2, то $\frac{BN}{CN} = \frac{mC}{mB} = \frac{1}{2}$ следовательно, $m_B = 2$.Т.к. $m_A = m_C = 1$, то

   $m_M = 2$; $m_B = 2$;
3. Точка O является центром масс системы двух точек B и M, значит по определению центра масс $\frac{BO}{MO} = \frac{mM}{mB} = \frac{1}{1}$.

Ответ: $\frac{BO}{OM} = \frac{1}{1}$.

Задача 2. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки K и L так, что AK/KB = 4/7; AL/LC = 3/2. Прямая KL пересекает продолжение стороны BC в точке M. Найти отношение CM/BC.



Загрузим точки A, B, C соответствующими массами.

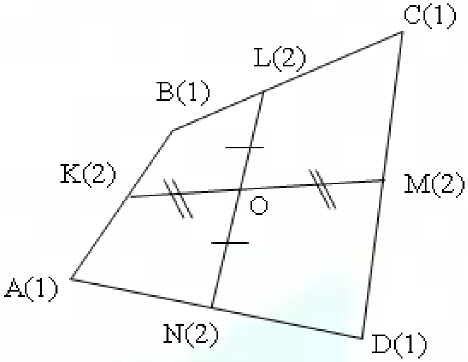
1. По определению центра масс для точки L: AL × m_A = CL × m_C;
   Т.к. $\frac{AL}{Cl} = \frac{3}{2}$, то $m_A = 2$; $m_C = 3$.

2. По определению центра масс для точки K: AK × m_A = BK × m_B;
   Т.к. $\frac{AK}{BK} = \frac{4}{7}$, то $m_B = \frac{8}{7}$.

3. Рассмотри центр масс двух точек B и M – точку C:
   $m_C = m_B + m_M$, следовательно $m_M = \frac{13}{7}$,
   а значит $\frac{CM}{BC} = \frac{8 \cdot 7}{7 \cdot 13} = \frac{8}{13}$. .

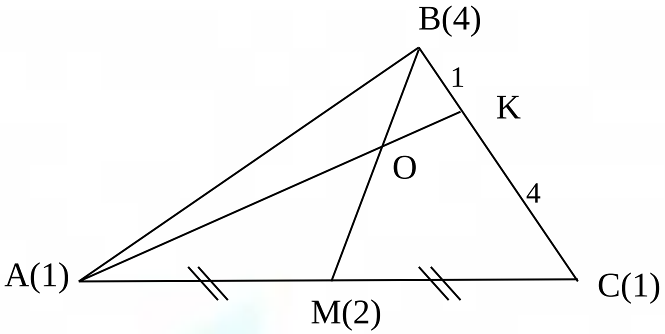
   Ответ: $\frac{CM}{BC} = \frac{8}{13}$.

Задача 3 (задача 16 ЕГЭ профиль). Дан выпуклый четырёхугольник ABCD. Докажите, что отрезки *LN* и *KM*, соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.



1. Загрузим точки A, B, C, D четырехугольника ABCD соответствующими массами:
2. Пусть K, L, M и N – середины сторон AB, BC, CD, AD четырехугольника ABCD соответственно. По определению центра масс: $m_A \times AK = m_B \times BK$; $m_B \times BL = m_C \times CL$; $m_C \times CM = m_D \times DM$; $m_D \times DN = m_A \times AN$.
3. Значит массы точек A, B, C, D равны между собой.Пусть $m_A = m_B = m_C = m_D = 1$. Т.к. точки K, L, M и N – середины сторон AB, BC, CD, AD, то $m_K = m_L = m_M = m_N = 2$. По определению центра масс для точки O: $m_K \times KO = m_M \times MO$; $m_N \times NO = m_L \times LO$, следовательно KO = MO; NO = LO, что и требовалось доказать.

Задача 4. В треугольнике АВС точка К делит ВС в отношении 1:4, считая от вершины В. В каком отношении АК делит медиану ВМ?



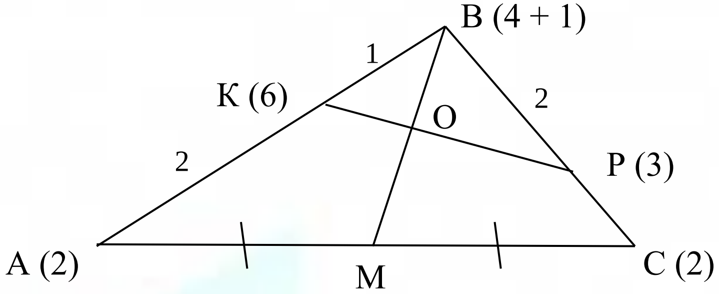
1. Загрузим точки А, В, С соответствующими массами. По определению центра масс для точки К: ВК × m_B = КС × m_C; $\frac{BK}{CK} = \frac{mC}{mB} = \frac{1}{4}$ следовательно, $m_B = 4$, $m_C = 1$.

2. По определению центра масс для точки М: АМ = МС (по условию), значит $m_A = m_C = 1$.
Следовательно $m_M = m_A + m_C = 2$.

3. Точка О является центром масс системы двух точек В и М, значит по определению центра масс $\frac{BO}{MO} = \frac{mM}{mB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{BO}{MO} = \frac{1}{2}$.

Задача 5. Дан треугольник ABC, BM – медиана. Отрезок KP точкой K делит AB в отношении 2:1 от вершины A, а точкой P делит отрезок BC в отношении 2:1 от вершины B. Отрезки KP и BM пересекаются в точке O. В каком отношении точка O делит отрезок KP?

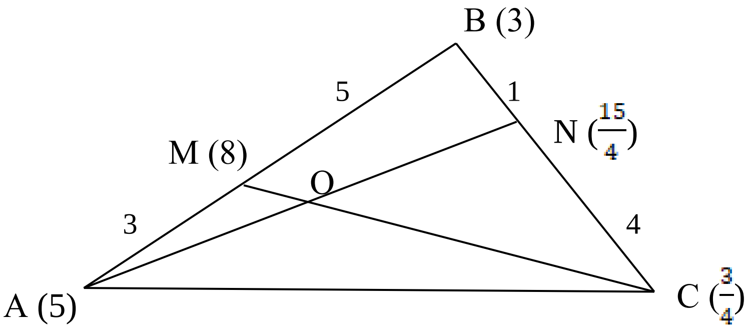


1. Найдем такие массы точек A, B, C, чтобы точка O стала центром масс системы точек, т.е. центр масс должен попасть и на отрезок KP, и на отрезок BM. Для этого расщепим массу точки B.
2. Относительно точки P: $2 \cdot m1_B = m_C$ (из соотношения BP и CP). Относительно точки K: $m2_B = 2 \cdot m_A$ (из соотношения BP и CP).
3. Пусть $m1_B = 1$, тогда $m_C = 2$, $m_A = m_C = 2$ (BM – медиана), $m2_B = 4$.
   Значит $m_K = m2_B + m_A = 6$; $m_P = m1_B + m_C = 3$.

4. Следовательно, относительно точки O: $\frac{KO}{PO} = \frac{mP}{mK} = \frac{1}{2}$.

   Ответ: $\frac{KO}{PO} = \frac{1}{2}$.

Задача 6. На сторонах AB и BC расположены точки M и N соответственно, причем AM : BM = 3 : 5, BN : NC = 1 : 4. Прямые CM и AN пересекаются в точке O. Найти отношения AO : ON и CO : OM.



1. Загрузим точки A, B, C соответствующими массами.

По определению центра масс для точки M: BM × m_B = AM × m_A; $\frac{BM}{AM} = \frac{mA}{mB} = \frac{5}{3}$ следовательно, $m_B = 3$, $m_A = 5$.

По определению центра масс для точки N: B N × m_B = CN × m_C; $\frac{BN}{CN} = \frac{mC}{mB} = \frac{1}{4}$, следовательно, $m_C = \frac{3}{4}$.

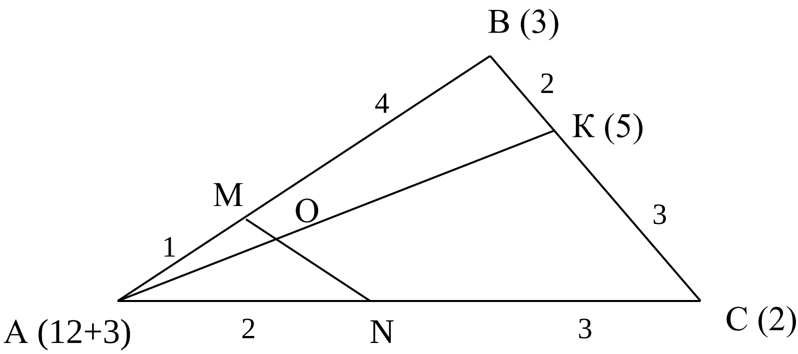
Точки M и N – центры масс для точек A и B, C и B, следовательно, $m_M = m_B + m_A = 5$; $m_N = m_B + m_C = \frac{15}{4}$.

2. Точка O является центром масс системы двух точек A и N, значит по определению центра масс $\frac{AO}{NO} = \frac{mN}{mA} = \frac{3}{4}$. Также точка O

является центром масс системы двух точек C и M, значит по определению центра масс $\frac{CO}{MO} = \frac{mM}{mC} = \frac{3}{32}$.

Ответ: $\frac{AO}{NO} = \frac{3}{4}$; $\frac{CO}{MO} = \frac{3}{32}$.

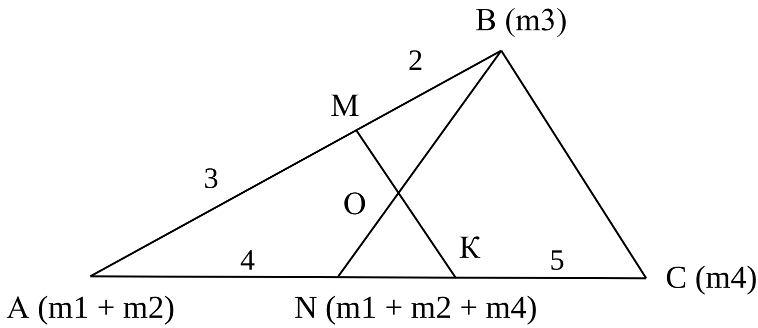
Задача 7. В треугольнике ABC точки M, N, К расположены соответственно на сторонах AB, AC, BC так, что AM : BM = 1 : 4; AN : CN = 2 : 3; CK : KB = 3 : 2. Отрезки AK и MN пересекаются в точке O. Во сколько раз OK больше AO?



1. Найдем такие массы точек A, B, C, чтобы точка O стала центром масс системы точек, т.е. центр масс должен попасть и на отрезок AK, и на отрезок MN. Для этого расщепим массу точки A.
2. Относительно точки K: $2\cdot m_B = 3\cdot m_C$, значит $m_C = 2$, а $m_B = 3$.
3. Расщепим массу m_A точки A на массы m1 и m2 так, что $m1\cdot AM = m_B\cdot BM$, следовательно, $m1 = 12$; $m2\cdot AN = m_C\cdot CN$, следовательно, $m2 = 3$.
4. Точка O является центром масс системы двух точек A и K. Значит, $m_A \cdot AO = m_K \cdot KO$, т.е. $(m1+m2)\cdot AO = (m_B + m_C)\cdot KO$. Следовательно, $\frac{KO}{AO} = \frac{15}{5} = 3$.

Ответ: $\frac{KO}{AO} = 3$.

Задача 8. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки M и N соответственно так, что AM : BM = 3 : 2 и AN : CN = 4 : 5. В каком отношении прямая, проходящая через точку M параллельно BC, делит отрезок BN?



1. Пусть MO // BC и пересекает сторону AC в точке K. Тогда треугольник AMK подобен треугольнику ABC (по двум углам). Следовательно, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{3}{2}$.
2. Найдем такие массы точек A, B, C, чтобы точка O стала центром масс системы точек, т.е. центр масс должен попасть и на отрезок BN, и на отрезок MK. Для этого расщепим массу точки A.
3. Пусть масса m точки A равна m = m1 + m2. Масса точек B и C равны m3 и m4 соответственно. Тогда составим систему уравнений:

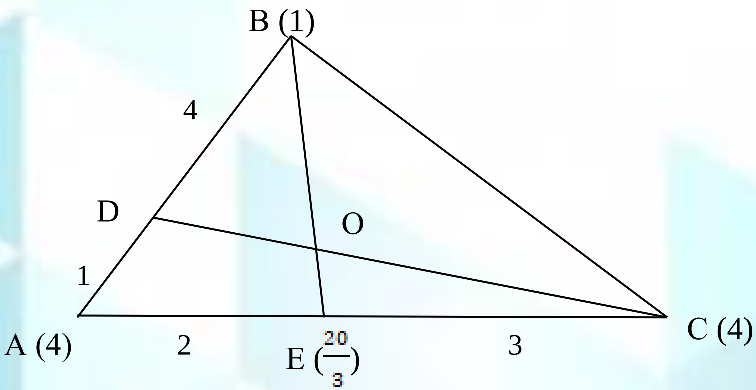
$$\begin{cases} 3 \times m1 = 2 \times m3 \\ 3 \times m2 = 2 \times m4 \\ 4 \times (m1 + m2) = 5 \times m3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m1 = \frac{2}{3} \times m3 \\ m2 = \frac{2}{3} \times m4 \\ m3 = \frac{7}{8} \times m4 \end{cases}$$

4. Пусть m4 = 1, тогда m3 = $\frac{7}{8}$; m1 = $\frac{14}{24}$; m2 = $\frac{2}{3}$. Следовательно, m_N = m1 + m2 + m4 = $\frac{54}{24}$. По определению центра масс для точки О: $\frac{BO}{NO} = \frac{mN}{m3} = \frac{54 \cdot 8}{24 \cdot 7} = \frac{18}{7}$.

Ответ: $\frac{BO}{NO} = \frac{18}{7}$.

Задача 9. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка E, причем AE : EC = 2 : 3, а на стороне AB взята точка D так, что AD : DB = 1 : 4. Отрезки CD и BE пересекаются в точке O. Найдите отношение четырехугольника ADOE к площади треугольника ABC.

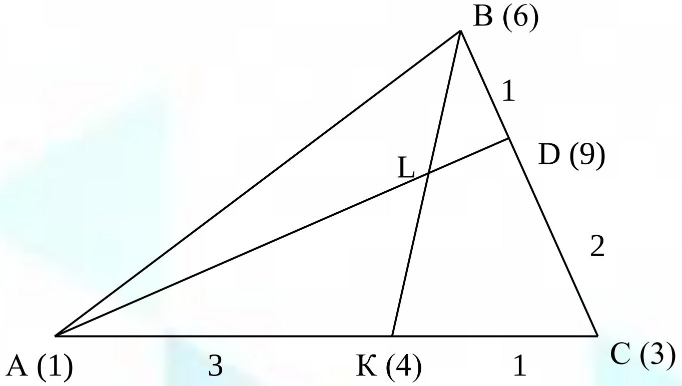


1. Загрузим точки A, B, C соответствующими массами исходя из определения центра масс. Получим, $m_B = 1$, $m_A = 4$, $m_C = \frac{8}{3}$, $m_E = m_A + m_C = \frac{20}{3}$.
2. Найдем площади треугольников ABE и BDO: $\frac{S_{ABE}}{S_{ADO}} = \frac{AB \cdot BE}{BD \cdot BO} = \frac{23}{16}$, следовательно, $S_{ABE} = 23$, $S_{BDO} = 16$.

3. Треугольники ABC и ABE имеют общую высоту, следовательно, $\frac{SABC}{SABE} = \frac{AC}{AE} = \frac{5}{2}$, т.е. $S_{ABC} = \frac{5}{2} S_{ABE}$.
4. $S_{ADOE} = S_{ABE} - S_{BDO} = 23 - 16 = 7$. $\frac{SADOE}{SABC} = \frac{SADOE}{\frac{5}{2}SABE} = \frac{14}{115}$.

Ответ: $\frac{SADOE}{SABC} = \frac{14}{115}$.

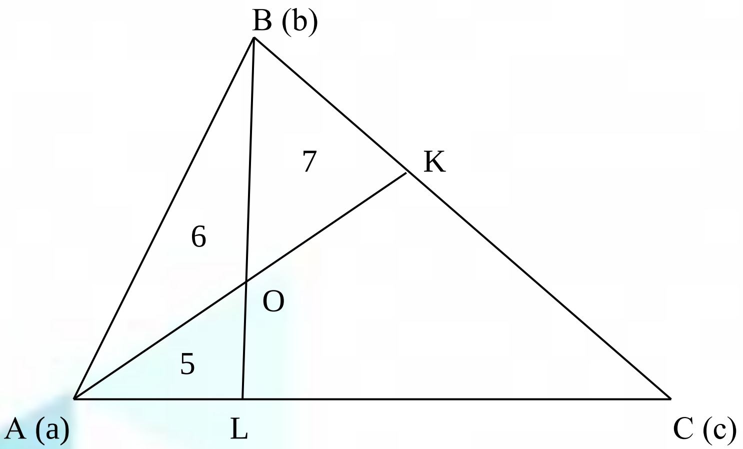
Задача 10. Площадь треугольника ABC равна 120, точка D лежит на отрезке BC так, что BD : CD = 1 : 2, биссектриса BK пересекает прямую AD в точке L. Найдите площадь четырехугольника KLDC, если AK : KC = 3 : 1.



1. Загрузим точки A, B, C соответствующими массами исходя из определения центра масс для точки L. Получим, $m_A = 1$, $m_C = 3$, $m_B = 6$. Таким образом, $\frac{AL}{DL} = \frac{mD}{mA} = \frac{9}{1}$; $\frac{BL}{LK} = \frac{mK}{mB} = \frac{2}{3}$.
2. Треугольники ABC и ABK имеют общую высоту, следовательно $S_{ABK} = S_{ABC} \cdot \frac{AK}{AC} = 120 \cdot \frac{3}{4} = 90$. Значит, $S_{KBC} = 30$. Аналогично, $S_{ABD} = 40$.
3. Рассмотрим треугольники KBC и BLD: $\frac{SBLD}{SKBC} = \frac{2}{5 \cdot 3}$, т.е. $S_{BLD} = 4$. Значит, $S_{KLDC} = S_{KBC} - S_{BLD} = 26$.

Ответ: $S_{KLDC} = 26$.

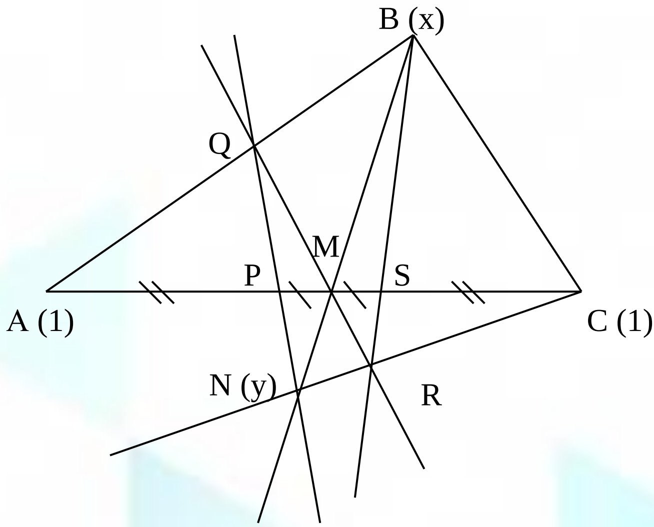
Задача 11. На сторонах AC и BC взяты точки L и K. O – точка пересечения отрезков AK и BL. Найдите площадь исходного треугольника, если площади треугольников ALO, AOB, BOK равны соответственно 5, 6 и 7.



1. Заметим, что $\frac{BO}{OL} = \frac{S_{ABO}}{S_{AOL}} = \frac{6}{5}$ и $\frac{AO}{OK} = \frac{S_{ABO}}{S_{BOK}} = \frac{6}{7}$. Подберем такие массы a, b,c для точек A, B, C, чтобы точка O стала центром массы системы. Составим систему уравнений:
$$\begin{cases} 6 \cdot b = 5 \cdot (a + c) \\ 6 \cdot a = 7 \cdot (b + c) \end{cases}$$
2. Из полученных уравнений найдем, a = 77c; b = 65c. Отсюда CL = 77 · LA, значит $S_{BCL} = 77 \cdot S_{ALB}$; $S_{ABC} = 78 \cdot S_{ALB} = 78 \cdot 11 = 858$.

Ответ: $S_{ABC} = 858$.

Задача 12. Дан треугольник ABC; на продолжении его медианы BM за точку M выбрана точка N, через которую проведена прямая, пересекающая отрезки AM и AB в точках P и Q соответственно. Прямые MQ и NC пересекаются в точке R, а прямые RB и AC – в точке S. Докажите равенство PM = MS.



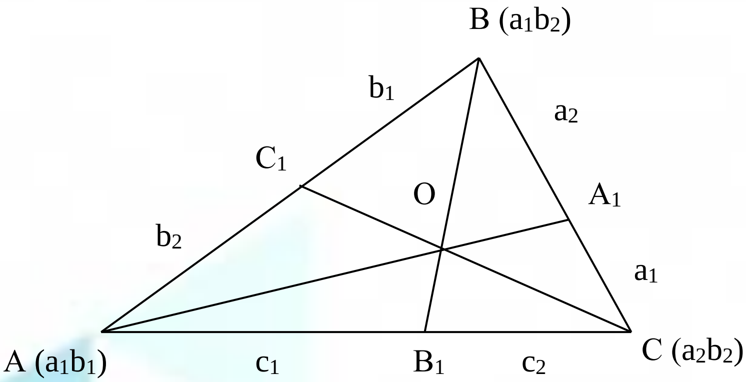
1. Поместим в точки A и C единичные массы, а в точки B и N такие массы x и y, что Q = c (1A, xB) и M = c (xB, yN)

2. Поскольку M – центр масс точек A и C, т.е. M = c (1A, 1C), то M = c (xB, yN, 1A, 1C) = c ((1 + x)Q, (1 + y)R)

3. По-разному группируя массы точек A ,B, N получаем, что P – центр масс этих точек, т.е. 1A + x + y = (1 + x + y) P
 Аналогично получаем, S – центр масс точек B, C, N, т.е. 1B + x + y = (1 + x + y) S

4. Значит, M = c ((1 + x + y) P; (1 + x + y) S). Получилось, что центр двух одинаковых масс в точках P и S расположен в точке M. Поэтому M – середина отрезка PS.

Задача 13. Докажите теорему Чевы. На сторонах треугольника ABC выбраны точки $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$. Отрезки AA1, BB1,
CC1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{CA1}{BA1} \cdot \frac{BC1}{AC1} \cdot \frac{AB1}{CB1} = 1$.



1. Пусть отрезки AA1, BB1, CC1 пересекаются в точке O. Разместим в вершинах треугольника такие массы, чтобы точка O стала центром масс системы.
2. Обозначим $CA_1 = a_1$; $BA_1 = a_2$; $BC_1 = b_1$; $AC_1 = b_2$; $AB_1 = c_1$; $CB_1 = c_2$. Следовательно, подходящим будет распределение масс (a_1b_1 A, a_1b_2 B, a_2b_2 C)
3. Если выполнено равенство $\frac{CA1}{BA1} \cdot \frac{BC1}{AC1} \cdot \frac{AB1}{CB1} = 1$, то $a_1 \cdot b_1 \cdot$

   $c_1 = a_2 \cdot b_2 \cdot c_2$, значит B_1 – центр масс двух точек A и C.

   И тогда центр масс должен лежать на прямой BB_1, другими словами, прямые AA1, BB1, CC1 пересекаются в одной точке.

Задачи для самостоятельного решения.

1. *Площадь треугольника ABC равна 120, точка D лежит на отрезке BC так, что BD : CD = 1 : 2, биссектриса BK пересекает прямую AD в точке L. Найдите площадь четырехугольника KLDC, если AK : KC = 3 : 1.*

2. *В треугольнике ABC точка K лежит на стороне BC так , что BK : KC = 1 : 2, биссектриса CM пересекается с прямой AK в точке L, при этом AM : MB = 1 : 4. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь четырехугольника MBKL равна 52.*

3. *В параллелограмме ABCD отмечена точка M-середина отрезка BC. Отрезок AM пересекается с диагональю BD в точке K. Докажите, что BK : BD = 1 : 3.*

4. *Точка A_1 симметрична вершине A треугольника ABC относительно середины стороны BC, точка B_1 симметрична вершине B относительно середины стороны AC. Докажите, что точки A_1, B_1 и C лежат на одной прямой.*

5. *Площадь треугольника ABC равна 40, биссектриса AD пересекает медиану BK в точке E, при этом BD : CD = 3 : 2. Найдите площадь четырехугольника EDCK.*

6. *Биссектриса угла B треугольника ABC делит медиану , проведенную из вершины C, в отношении 7 : 2, считая от вершины C. В каком отношении, считая от вершины A, эта биссектриса делит медиану, проведенную из вершины A?*

7. *В треугольнике ABC точка K лежит на стороне BC так, что BK:KC =1:2, биссектриса CM пересекается с прямой AK в точке L, при этом AM:MB=1:4. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь четырехугольника MBKL равна 52.*

8. *Точка A_1 симметрична вершине A треугольника ABC относительно середины стороны BC, точка B_1 симметрична вершине B относительно середины стороны AC. Докажите, что точки A_1, B_1 и C лежат на одной прямой.*

9. *Площадь треугольника ABC равна 40, биссектриса AD пересекает медиану BK в точке E, при этом BD:CD = 3:2. Найдите площадь четырехугольника EDCK.*

10. *Биссектриса угла B треугольника ABC делит медиану, проведенную из вершины C, в отношении 7:2, считая от вершины C. В каком отношении, считая от вершины A, эта биссектриса делит медиану, проведенную из вершины A?*

11. *В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF с вершиной S боковое ребро вдвое больше стороны основания.*

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит апофему грани ASB в отношении 2:1, считая от вершины S.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S.

12. *В треугольнике ABC проведены отрезки AA_1, BB_1(A_1 на BC, B_1 на AC), пересекающиеся в точке O. Отношение отрезков $BA_1 : A_1C = 3:4$, $AO : OA_1 = 1:2$.*

а) Найти отношение $AB_1:B_1C$ и $BO : OB_1$.

б) В треугольнике провели так же прямую CC_1(точка пересечения с AB – C_1), так что $AC_1:C_1B = 2:7$. Доказать, что AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке O.

в) Найдите отношение площадей $S_{OBA1}: S_{ABC}$.

13. *В треугольнике ABC проведены отрезки AA_1, BB_1(A_1 на BC, B_1 на AC), пересекающиеся в точке O. Отношение отрезков*

$BO : OB_1 = 6:1$, $AO : OA_1 = 3:2$. *Найти отношение* $AB_1:B_1C$ *и* $BO : OB_1$. *Найти отношение* $BA_1:A_1C$ *и* $AB_1 : B_1C$. *Определить в каком отношении прямая CO делит сторону AB.*

14. *В треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Найдите отношение, в котором делятся биссектрисы треугольника точкой их пересечения.*

15. *В треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Найдите отношение, в котором биссектриса AA_1 делит медиану BB_1.*

Список литературы

1. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. Москва «Наука», главная редакция физико-математической литературы, 1987, библиотечка «Квант», выпуск 61.
2. Интернет ресурсы: https://ege.sdamgia.ru
3. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии: Ч.2 – Наука, 1990
4. Ф.Ф.Лысенко, С.Ю. Кулабухова, «Математика 9 класс, подготовка к ГИА-2012». «Легион-М», Ростов на Дону.
5. Эвнин А.Ю. Метод масс в геометрии треугольника // Математика в школе – 2014
6. Эвнин А.Ю. Практикум по математике – Челябинск, 2009
7. Эвнин А.Ю. 150 красивых задач для будущих математиков, 2014
8. ФИПИ, «ГИА-2012, Математика, типовые экзаменационные варианты», под редакцией И.В. Ященко. «Национальное образование», Москва.
9. ФИПИ, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова и др. «ГИА-2012, экзамен в новой форме, Математика 9 класс», «АСТРЕЛЬ», Москва.
10. Ф.Ф.Лысенко, С.Ю. Кулабухова, «Математика 9 класс, подготовка к ГИА-2012». «Легион-М», Ростов на Дону.